4) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x=\frac{1}{2}$

II- Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(t)}dt$.

1) Montrer que f est dérivable $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sur et que : $F'(x)=\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) Montrer que $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ on a : $\frac{x}{\ln(2x)}\le F(x)\le\frac{x}{\ln(x)}$. Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$.

3) Montrer que : $\forall x\in\left[\alpha,\frac{1}{2}\right[$, on a : $F(x)\le\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{dt}{t-1}$. Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}F(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de F.

5) a- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ l'équation : 1 + n F(x) = 0 admet dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ une solution α_n.

b- Montrer que (α_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente

. **Exercice N°18 :** Pour tout $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\ln(t)\right]^n dt$

1-a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Pour tout $\forall n\in\mathbb{N}^*$, montrer que : $I_{n+1}=2\sqrt{e}-2(n+1)I_n$. c) En déduire I_2 puis $\int_1^e\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\ln(t)-1\right]^2 dt$.

2-a) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $0\le I_n\le\frac{3}{2}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente.

3-a) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3}\le I_n\le\frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$. b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$.

Exercice N°19 : I- Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(1+x)$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans l'intervalle $]-1,+\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que 3,8 < α < 4

3) En déduire le signe de g(x) pour tout $x\in]-1,+\infty[$. 4) Montrer que pour tout $x\in]-1,+\infty[$, on a :g(x) ≤ 1.

II- Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases}f(x)=\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$. 2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f et vérifier que : $f(\alpha)=\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

5) Tracer la courbe (C) de f.

Qarray.tn Agra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...